Theoretische Grundlagen des Software Engineering

9: Prädikatenlogik

Stephan Schulz
schulz@eprover.org

Rückblick

Rückblick: Vor- und Nachteile von Aussagenlogik

- 😊 Aussagenlogik ist deklarativ:
  Syntaxelemente entsprechen Fakten
- 😊 Aussagenlogik erlaubt partielle / disjunktive / negative Aussagen
  (im Gegensatz zu vielen Datenstrukturen und Datenbanken)
- 😊 Aussagenlogik ist kompositional:
  Bedeutung von $B_{1,1} \wedge P_{1,2}$ leitet sich ab aus der von $B_{1,1}$ und $P_{1,2}$
- 😊 Bedeutung in Aussagenlogik ist kontextunabhängig
  (im Gegensatz zu natürlicher Sprache)
- ☹ Aussagenlogik hat nur beschränkte Ausdruckskraft
  (im Vergleich zu natürlicher Sprache)
  Beispiel:
  Aussage „Gruben bewirken Luftzug in benachbarten Feldern“
  erfordert eine Formel für jedes Feld

Andere Logiken

Logik	Welt	Wahrheitswerte
Aussagenlogik	Fakten	wahr/falsch
Prädikatenlogik	Objekte, Funktionen, Relationen	wahr/falsch
Temporallogik	Fakten, Zeitpunkte	wahr/falsch
Mehrwertige Logik	Fakten	wahr/falsch/unbekannt
Fuzzy- Logik	Fakten	$0 \ldots 1$

Mehr Ausdruckskraft: Prädikatenlogik

Aussagenlogik: Die Welt besteht aus atomaren Fakten

Der Ball ist Rot, Ein Dame steht auf Feld (3,5), Der Wumpus ist in Feld (4,2), ...

Fakten können war oder falsch sein

Mehr Ausdruckskraft: Prädikatenlogik

Prädikatenlogik: Reichere Struktur

Objekte (Elemente)

Leute, Häuser, Zahlen, Theorien, Donald Duck, Farben, Jahre, ...

Relationen (Prädikate/Eigenschaften)

rot, rund, prim, mehrstöckig, ...
ist Bruder von, ist größer als, ist Teil von, hat Farbe, besitzt, ...
$=, >, \ldots$

Funktionen

$+$, Mitte von, Vater von, Anfang von, ...

Syntax der Prädikatenlogik

Syntax der Prädikatenlogik: Logische Zeichen

Wie in der Aussagenlogik

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn … dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)
- ( ) die beiden Klammern

Quantoren

- $\forall$ Allquantor („für alle“)
- $\exists$ Existenzquantor („es gibt“)

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition: Variablenmenge *Var*

Var ist eine abzählbare Menge (von Variablensymbolen)
z.B.: $x, \ y, \ a, \ b, \ \ldots$

Definition: Prädikatenlogische Signatur Σ

Eine Signatur ist ein Paar $\Sigma = \langle P, F \rangle$ mit

P: Prädikatensymbole z.B. $\mathit{bruderVon}, \ >, \ =, \ \ldots$
F: Funktionssymbole z.B.
$2, \ \mathit{hildesheim}, \ c, \ \mathit{sqrt}, \ \mathit{leftLegOf}, \ \ldots$

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Anmerkungen

Wir verlangen, dass Var, P, F disjunkt sind

Funktions- und Prädikatensymbole haben ein Stelligkeit $n \geq 0$

- Schreibweise: $f|_n$ oder $arity(f) = n$
- Oft implizit ersichtlich aus der Verwendung

Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstanten

z.B. 2, $hildesheim$, c

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Definition: Menge $Term_\Sigma$ der Terme über Σ

Gegeben:

– $\Sigma = \langle P, F \rangle$ eine prädikatenlogische Signatur

– *Var* eine Menge von Variablen

$Term_\Sigma$ ist die kleinste Menge mit:

$Var \subseteq Term_\Sigma$

Wenn

– $f \in F$ mit Stelligkeit n

– $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$

dann

$f(t_1, \ldots, t_n) \in Term_\Sigma$

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Bemerkungen

(Insbesondere) sind alle Konstanten in $Term_\Sigma$

- Wir schreiben in der Regel a, 1, statt $a(), 1()$

Terme ohne Variablen heißen Grundterme oder einfach grund

Terme bezeichnen (Mengen von) Elementen des Universums

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Definition: Menge $Atom_\Sigma$ der Atome über Σ

Gegeben:

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ eine prädikatenlogische Signatur
- *Var* eine Menge von Variablen

$Atom_\Sigma$ ist die kleinste Menge mit: Wenn

- $p \in P$ mit Stelligkeit n
- $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$

dann

$p(t_1, \ldots, t_n) \in Atom_\Sigma$

Bemerkung

Atome haben Wahrheitswerte (im Unterschied zu Termen)

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiele

$$\underbrace{\underbrace{\mathit{bruder}}_{\text{Prädikat}}\ (\ \underbrace{\underbrace{\mathit{kingJohn}}_{\text{Konstante}}}_{\text{Term}},\ \underbrace{\underbrace{\mathit{richardTheLionheart}}_{\text{Konstante}}}_{\text{Term}}\ )}_{\text{Atom}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiel

$$\underbrace{\underbrace{>}_{\text{Prädikat}} \; (\underbrace{\underbrace{laenge}_{\text{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\text{Funktion}}(\underbrace{richard}_{\text{Konstante}}))}_{\text{Term}}, \; \underbrace{\underbrace{laenge}_{\text{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\text{Funktion}}(\underbrace{kingJohn}_{\text{Konstante}}))}_{\text{Term}} \;)}_{\text{Atom}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Definition: Menge For_Σ der Formeln über Σ

Gegeben:

– $\Sigma = \langle P, F \rangle$ eine prädikatenlogische Signatur
– Var eine Menge von Variablen

For_Σ ist die kleinste Menge mit:

- $Atom_\Sigma \subseteq For_\Sigma$
- $\mathbf{1} \in For_\Sigma$ und $\mathbf{0} \in For_\Sigma$
- Wenn $A, B \in For_\Sigma$, dann auch
  $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ in For_Σ
- Wenn $A \in For_\Sigma$ und $x \in Var$, dann
  $\forall x A$, $\exists x A$ in For_Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{bruder}_{\text{Prädikat}}(\underbrace{kingJohn}_{\text{Term}}, \underbrace{richard}_{\text{Term}})}_{\text{Atom}} \rightarrow \underbrace{\underbrace{bruder}_{\text{Prädikat}}(\underbrace{richard}_{\text{Term}}, \underbrace{kingJohn}_{\text{Term}})}_{\text{Atom}}}_{\text{Komplexe Formel}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

„Alle, die in Hildesheim studieren, sind schlau“

$$\underbrace{\forall \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{(studiertIn(x, hildesheim) \rightarrow schlau(x))}_{\text{Formel (Skopus)}}}_{\text{Formel}}$$

„Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist“

$$\underbrace{\exists \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{(studiertIn(x, landau) \wedge schlau(x))}_{\text{Formel (Skopus)}}}_{\text{Formel}}$$

Freie und gebundene Variablen

Definition: Freie / gebundene Variable

Ein Vorkommen einer Variablen x heißt

- gebunden, wenn sie im Skopus einer Quantifizierung $\forall x$ / $\exists x$ ist
- frei sonst

Beispiel

$$p(z) \rightarrow \forall x\ (q(x, z) \wedge \exists z\ r(y, z))$$

- x gebunden
- y frei
- z frei und gebunden (verwirrend, sollte vermieden werden!)

Syntax der Prädikatenlogik: Bemerkungen

Bemerkungen

Nach unserer Definition werden alle Funktions- und Prädikatssymbole in Prefix-Notation verwendet:

- $= (1, 2), \mathit{even}(2), +(3, 5), \mathit{multiply}(2, 3)$

Konvention: Zweistellige Symbole mit bekannter Semantik werden gelegentlich Infix geschrieben

- Insbesondere das Gleichheitsprädikat $=$
- Im Bereich SMT auch $>, +, *, \leq, \ldots$

Semantik der Prädikatenlogik

Semantik der Prädikatenlogik

Definition: Prädikatenlogische Interpretation

Eine (prädikatenlogische) Interpretation ist ein Paar $\langle U, A \rangle$ mit

U: eine nicht-leere Menge (Universum)

A: eine Interpretationsfunktion – sie interpretiert

- (freie) Variablen: durch ein Element des Universums
- Prädikate: durch eine Relation auf dem Universum (mit passender Stelligkeit)
- Funktionen: durch eine Funktion auf dem Universium (mit passender Stelligkeit)

Semantik der Prädikatenlogik

Bemerkungen

- Im allgemeinen ist das Universum U einen prädikatenlogischen Modells unendlich
- Auch schon für ein endliches U gibt es eine riesige Zahl verschiedener Modelle

Semantik der Prädikatenlogik

Notation

Seit $I = \langle U, A \rangle$ eine prädikatenlogische Interpretation und $s \in P \cup F \cup Var$. Dann sei:

$$s^I = A(s)$$

Also: s^I bezeichnet $A(s)$, die Interpretation des Prädikats-, Funktions- oder Variablensymbols s unter I

Semantik der Prädikatenlogik

Definition: Semantik eines Terms t

Gegeben eine prädikatenlogische Interpretation I:

Die Semantik von $t \in Term_\Sigma$ ist das Element $I(t)$ aus U, das rekursiv definiert ist durch

Ist $t = x$ eine Variable: $I(t) = x^I$

Ist $t = c$ eine Konstante: $I(t) = c^I$

Ist $t = f(t_1, \ldots, t_n)$: $I(t) = f^I(I(t_1), \ldots, I(t_n))$

Semantik der Prädikatenlogik

Definition: Semantik einer Formel

Gegeben ein prädikatenlogische Interpretation I

Die Semantik $I(F)$ einer Formel F unter I ist einer der Wahrheitswerte *true* oder *false*

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{1}) &= \mathit{true} \\
I(\mathbf{0}) &= \mathit{false} \\
I(p(t_1, \ldots, t_n)) &= p^I(I(t_1), \ldots, I(t_n))
\end{aligned}
$$

Semantik der Prädikatenlogik

und (wie in der Aussagenlogik):

$$I(\neg F) = \begin{cases} \mathit{false} & \text{falls} \quad I(F) = \mathit{true} \\ \mathit{true} & \text{falls} \quad I(F) = \mathit{false} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und (wie in der Aussagenlogik):

$$I(F \wedge G) = \begin{cases} \textit{true} & \text{falls} \quad I(F) = \textit{true} \text{ und } I(G) = \textit{true} \\ \textit{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I(F \vee G) = \begin{cases} \textit{true} & \text{falls} \quad I(F) = \textit{true} \text{ oder } I(G) = \textit{true} \\ \textit{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und (wie in der Aussagenlogik):

$$I(F \rightarrow G) = \begin{cases} \mathit{true} & \text{falls} \quad I(F) = \mathit{false} \text{ oder } I(G) = \mathit{true} \\ \mathit{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I(F \leftrightarrow G) = \begin{cases} \mathit{true} & \text{falls} \quad I(F) = I(G) \\ \mathit{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und zusätzlich:

$$I(\forall x F) = \begin{cases} \textit{true} & \text{falls} \quad I_{x/d}(F) = \textit{true} \text{ für alle } d \in U \\ \textit{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I(\exists x F) = \begin{cases} \textit{true} & \text{falls} \quad I_{x/d}(F) = \textit{true} \text{ für mindestens ein } d \in U \\ \textit{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$I_{x/d}$ identisch mit I mit der Ausnahme, dass $x^{I_{x/d}} = d$

Universelle Quantifizierung

Intuition

$\forall x F$ entspricht in etwa der (unendlichen) Konjunktion aller Instanzen von F

Beispiel

$$\forall\ x\ (studiertIn(x, hildesheim) \rightarrow schlau(x))$$

$$\begin{array}{ll} & studiertIn(student1, hildesheim) \rightarrow schlau(student1) \\ \wedge & studiertIn(student2, hildesheim) \rightarrow schlau(student2) \\ \wedge & studiertIn(hildesheim, hildesheim) \rightarrow schlau(hildesheim) \\ \wedge & \ldots \end{array}$$

Universelle Quantifizierung

Faustregel

$\rightarrow$ ist der logische (Top- level-)Operator mit $\forall$

Häufiger Fehler

Verwendung von $\wedge$ mit $\forall$

Richtig: $\forall x\,(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{hildesheim}) \rightarrow \mathit{schlau}(x))$
"Alle, die in Hildesheim studieren, sind schlau"

Falsch: $\forall x\,(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{hildesheim}) \wedge \mathit{schlau}(x))$
"Alle studieren in Hildesheim und sind schlau", d.h.,
"Alle studieren in Hildesheim und alle sind schlau"

Existenzielle Quantifizierung

Intuition

$\exists x F$ entspricht in etwa der (unendlichen) Disjunktion aller Instanzen von F

Beispiel

$$\exists\, x\ (\mathit{studiertIn}(x, \mathit{landau}) \wedge \mathit{schlau}(x))$$

entspricht

$$\begin{array}{ll} & \mathit{studiertIn}(\mathit{student}1, \mathit{landau}) \wedge \mathit{schlau}(\mathit{student}1) \\ \vee & \mathit{studiertIn}(\mathit{student}2, \mathit{landau}) \wedge \mathit{schlau}(\mathit{student}2) \\ \vee & \mathit{studiertIn}(\mathit{landau}, \mathit{landau}) \wedge \mathit{schlau}(\mathit{landau}) \\ \vee & \ldots \end{array}$$

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel

$\wedge$ ist der logische (Top- level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler

Verwendung von $\rightarrow$ mit $\exists$

Richtig: $\exists x\, (studiertIn(x, landau) \wedge schlau(x))$
"Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist"

Falsch:
$\exists x\, (studiertIn(x, landau) \rightarrow schlau(x))$
"Es gibt jemanden, der, falls er/sie in Landau studiert, schlau ist"
Trivial wahr, wenn es irgendjemanden gibt, der nicht in Landau studiert

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$	ist das gleiche wie	$\forall y \forall x$
$\exists x \exists y$	ist das gleiche wie	$\exists y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ ist nicht das gleiche wie $\forall y \exists x$

Beispiel

$\exists x \forall y\; loves(x, y)$
Es gibt eine Person, die jeden Menschen in der Welt liebt (einschließlich sich selbst)

$\forall y \exists x\; loves(x, y)$
Jeder Mensch wird von mindestens einer Person geliebt

(Beides hoffentliche wahr aber verschieden:
das erste impliziert das zweite, aber nicht umgekehrt)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ ist nicht das gleiche wie $\forall y \exists x$

Beispiel

$\forall x \exists y\ mutter(y, x)$

Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x\ mutter(y, x)$

Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist (falsch)

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \ \neg \ldots$

$\exists x \ \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \ \neg \ldots$

Beispiel

$\forall x \ mag(x, eiskrem)$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \ \neg mag(x, eiskrem)$

$\exists x \ mag(x, broccoli)$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \ \neg mag(x, broccoli)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x\ (\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\ (\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie
$(\forall x\ \mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\ \mathit{arbeitet}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\lor$

$\exists x\ (\ldots \lor \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \lor (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\ (\mathit{eiskrem}(x) \lor \mathit{broccoli}(x))$ ist das gleiche wie
$(\exists x\ \mathit{eiskrem}(x)) \lor (\exists x\ \mathit{broccoli}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x\ (\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\ (\mathit{eiskrem}(x) \vee \mathit{broccoli}(x))$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x\ \mathit{eiskrem}(x)) \vee (\forall x\ \mathit{broccoli}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x\ (\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots)\ \wedge\ (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\ (\mathit{gerade}(x) \wedge \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\ \mathit{gerade}(x))\ \wedge\ (\exists x\ \mathit{ungerade}(x))$

Beispiele: Familienverhältnisse

„Brüder sind Geschwister“
$\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$

„bruder“ ist symmetrisch
$\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$

„Mütter sind weibliche Elternteile“
$\forall x \forall y\ (mutter(x, y) \leftrightarrow (weiblich(x) \wedge elter(x, y)))$

„Ein Cousin ersten Grades ist
das Kind eines Geschwisters eines Elternteils“
$\forall x \forall y\ (cousin1(x, y) \leftrightarrow$
$\exists p \exists ps\ (elter(p, x) \wedge geschwister(ps, p) \wedge elter(ps, y)))$

Wichtige Begriffe für Prädikatenlogik

Definition

- Modell
- Allgemeingültigkeit
- Erfüllbarkeit
- Unerfüllbarkeit
- Logische Folgerung
- Logische Äquivalenz

sind für Prädikatenlogik genauso definiert wie für Aussagenlogik (nur mit prädikatenlogischen Interpretationen/Modellen)

Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit

Kalküle

Es gibt korrekte und vollständige Kalküle für Prädikatenlogik (z.B. Resolution)

- Wenn $KB \vdash F$, dann $KB \models F$
- Wenn $KB \models F$, dann $KB \vdash F$

Aber diese Kalküle können die Erfüllbarkeit von Formeln NICHT entscheiden

Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit

Aussagenlogik

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit ENTSCHEIDBAR

Prädikatenlogik

Menge der allgemeingültigen Formeln AUFZÄHLBAR
Menge der unerfüllbaren Formeln AUFZÄHLBAR
Menge der erfüllbaren Formeln NICHT AUFZÄHLBAR

Ausblick: Deduktion

Automatische Deduktion für Prädikatenlogik

Verschiedene Ansätze

Betrachte alle Interpretationen

- Freie Funktions- und Prädikatssymbole
- Universum: Menge der Grundterme (Herbrand- Universum)

Betrachte feste Interpretationen

- Oft: Universum Ganzzahlen, rationale Zahlen, Fließkommazahlen
- Arithmetische Funktionen

Betrachte fest Interpretationen für manche Symbole

- Gut beherscht: Interpretiere Gleichheit (=)
- Ansonsten: Annäherung von beiden Seiten

Klassisches Theorembeweisen

Logik: Prädikatenlogik 1. Stufe

Schließen in allen Interpretationen

- Alle gewünschten Eigenschaften müssen axiomatisch beschrieben werden

Techniken:

- Resolution mit Varianten
- Model- Elimination
- Diskonnetions- Tableaux
- Instanziierungs- basierte Methoden

Klassisches Theorembeweisen mit Gleichheit

Logik: Prädikatenlogik 1. Stufe mit Gleichheit

Schließen in allen Gleichheits- Interpretationen

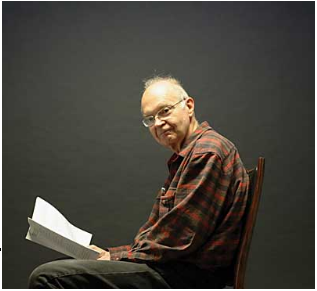
- $=^I$ muß Axiomen für Gleichheit genügen
- Alle anderen Eigenschaften müssen axiomatisch beschrieben werden

Techniken:

- Vervollständigung, Paramodulation, Superposition
- Andere Techninken in Kombination mit Paramodulation

Aktives Forschungsgebiet!

- State- of- the- art: Vampire, E, SPASS,. . .
- CADE ATP System Competition



Satisfiability modulo Theories

Logik: Prädikatenlogik mit fester Semantik

Logik unterstützt bestimmte Datentypen und Operationen

- Integers, Rationals, Arrays, ...
- Lineare Arithmetik, Einfügen,...

Einschränkungen:

- In der Regel keine allquantifizierten Variablen
- Nur wenige Theorien unterstützt
- Kombinationen von Theorien eingeschränkt

Aktives Forschungsgebiet

- Erolgreich für Verifikation
- Wettbewerb: SMT- Comp

Integration

Logik: Prädikatenlogik mit Gleicheit, freien und interpretierten Symbolen, verschiedenen Sorten, ...

Euer Job!

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogische Interpretation
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Eigenschaften von Quantoren
  (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge, \vee$
- Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit von Formeln
- Ausblick: Methoden und Techniken

Aufgaben

Sei $A_1 = \forall x(p(f(x))) \rightarrow q(a)$ und $A_2 = \forall x(p(f(x)) \rightarrow q(a))$

- Sei $I = \langle \{1, 2, 3\}, A \rangle$ mit A nach folgender Tabelle und $a^I = 2$:

x	$f^I(x)$	$p^I(x)$	$q^I(x)$
1	2	*true*	*true*
2	3	*false*	*true*
3	1	*false*	*false*

- Werten Sie A_1 und A_2

Betrachten Sie
$KB = \{\exists x p(x), \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))), \forall x(\neq (x, s(x))\}$, wobei $\neq^I$ die normale Ungleichheitsrelation sein.

- Geben Sie ein unendliches Modell von KB an.
- Geben Sie ein endliches Modell von KB an.
- Modifizieren Sie KB so, dass es unendliche, aber keine endlichen Modelle gibt.