Theoretische Grundlagen des Software Engineering

6: Formale Logik – Einführung

Stephan Schulz
schulz@eprover.org

Formale Logik

Ziel

- Formalisierung und Automatisierung rationalen Denkens
- Rational richtige Ableitung von neuem Wissen aus gegebenem

Formale Logik

Ziel

- Formalisierung und Automatisierung rationalen Denkens
- Rational richtige Ableitung von neuem Wissen aus gegebenem

Rolle der Logik in der Informatik

- Grundlagen der Informatik und der Mathematik:
  Axiomatische Mengenlehre, Boolsche Schaltkreise
- Anwendung innerhalb der Informatik:
  Spezifikation, Programmentwicklung, Programmverifikation
- Werkzeug für Anwendungen außerhalb der Informatik:
  Künstliche Intelligenz, Wissensrepräsentation

Quellen

Dieser Teil der Vorlesung lehnt sich an Teile der Vorlesung *Logik für Informatiker* von Bernhard Beckert, Universität Koblenz an, die wiederum auf der Vorlesung *Logik für Informatiker* von Uli Furbach, Universität Koblenz, beruht.

Literaturempfehlung: C. Chang and R.C. Lee, *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, 1973

Modellierung

Modellierung

?

Abstraktion

?

Modellierung: Adäquatheit des Modells

**Wenn formulierbare Aussage wahr im Modell,
dann entsprechende Aussage wahr in Wirklichkeit**

Beispiel: Aufzugssysteme

Höhe 818m

162 Stockwerke

57 Aufzüge

Aufzughöhe bis 504m

Geschwindigkeit bis 10m/s (36 km/h)

Doppelstöckige Aufzüge

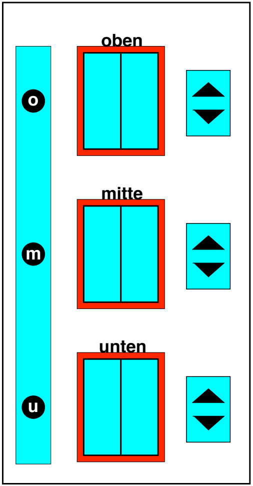
Modellierung: Beispiel Aufzug

Modellierung: Beispiel Aufzug

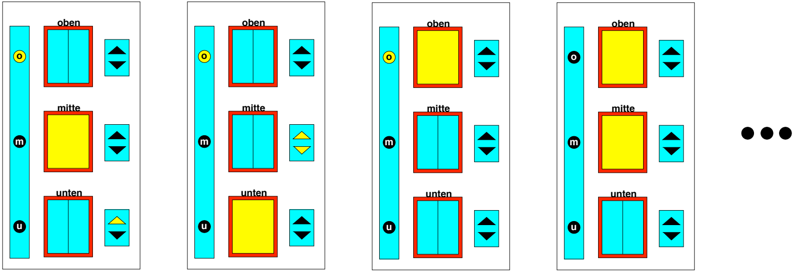
Modellierung der statischen Eigenschaften

Modellierung: Beispiel Aufzug

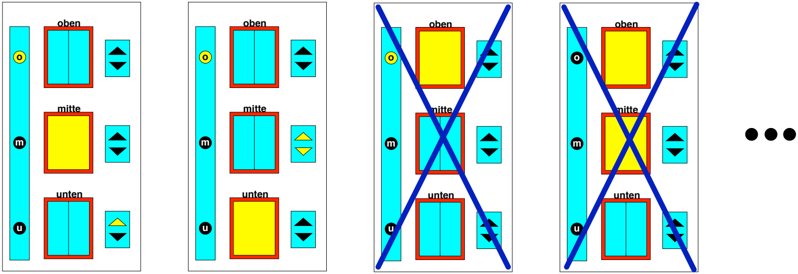
Modellierung der statischen Eigenschaften



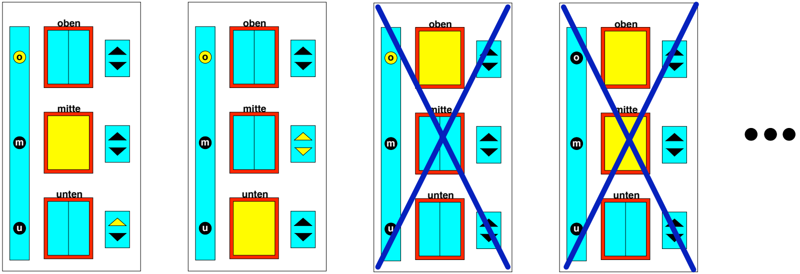
Modellierung: Strukturen



Modellierung: Strukturen



Modellierung: Strukturen



Aussagen beziehen sich auf Strukturen

(Formale) Aussagen sind in jeder einzelnen Struktur zu wahr oder falsch auswertbar

Formale Logik

Formale Logik

- Syntax - Welche Formeln?

Formale Logik

- **Syntax** - Welche Formeln?
- **Semantik** - Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?

Formale Logik

- ►Syntax - Welche Formeln?
- ►Semantik - Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?
- ►Deduktionsmechanismus - Ableitung neuer wahrer Formeln

Aussagenlogik: Syntax

Atomare Aussagen

Aufzug ist oben

aufzugOben

Innen mittlerer Knopf gedrückt

innenMitteGedrueckt

Aussagenlogik: Syntax

Atomare Aussagen

Aufzug ist oben
aufzugOben

Innen mittlerer Knopf gedrückt
innenMitteGedrueckt

Verknüpft mit logischen Operatoren

und	oder	impliziert	nicht
$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\neg$

Aussagenlogik: Syntax

Komplexe Aussagen

Wenn innen mittlerer Knopf gedrückt, dann Aufzug nicht in der Mitte

$$\mathit{innenMitteGedrueckt} \quad \rightarrow \quad \neg \mathit{aufzugMitte}$$

Aussagenlogik: Syntax

Komplexe Aussagen

Wenn innen mittlerer Knopf gedrückt, dann Aufzug nicht in der Mitte

$$\mathit{innenMitteGedrueckt} \quad \rightarrow \quad \neg \mathit{aufzugMitte}$$

Der Aufzug ist oben und der Aufzug ist nicht unten

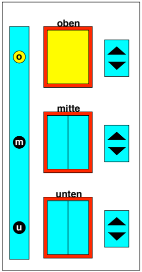
$$\mathit{aufzugOben} \quad \wedge \quad \neg \mathit{aufzugUnten}$$

Aussagenlogik: Semantik

Der Aufzug ist oben und der Aufzug ist nicht unten

$aufzugOben \quad \wedge \quad \neg aufzugUnten$

ist wahr in



Aussagenlogik: Deduktionsmechanismus

Syllogismen

$$\frac{\begin{array}{c} P \rightarrow \neg Q \\ Q \end{array}}{\neg P}$$

Aussagenlogik: Deduktionsmechanismus

Syllogismen

$$\frac{\begin{array}{c} P \rightarrow \neg Q \\ Q \end{array}}{\neg P}$$

$$\frac{\begin{array}{c} aufzugOben \rightarrow \neg aufzugUnten \\ aufzugUnten \end{array}}{\neg aufzugOben}$$

Deduktionsmechanismus

Deduktionsmechanismus im allgemeinen

Kalküle

Deduktionsmechanismus

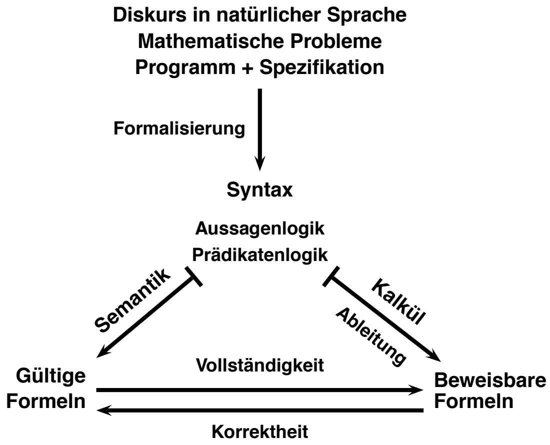
Deduktionsmechanismus im allgemeinen

Kalküle

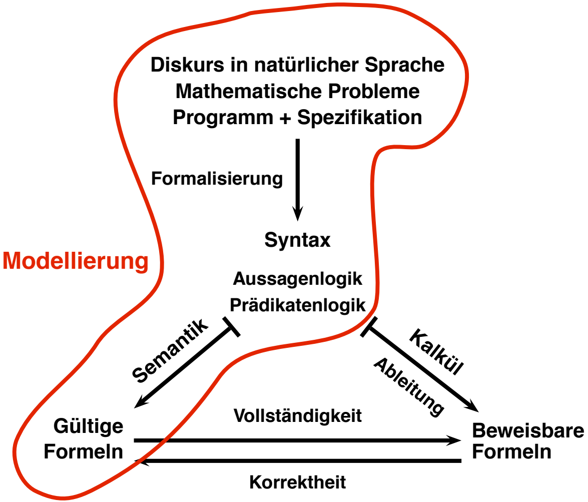
In dieser Vorlesung

Wahrheitstafeln
Logische Umformung
Resolutionskalkül

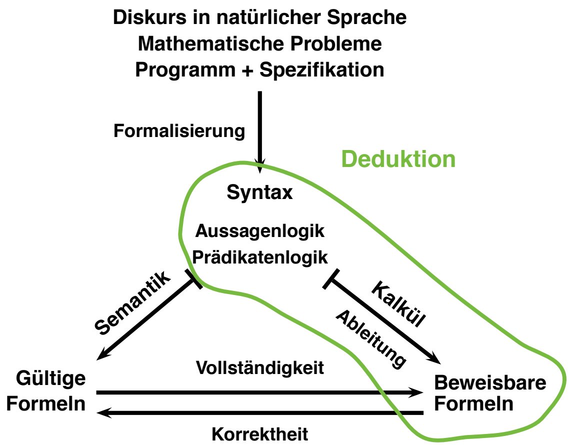
The Whole Picture



The Whole Picture



The Whole Picture



Inhalt der Vorlesung

1. Einführung
2. Aussagenlogik
   - Syntax und Semantik
   - Resolution, Vollständigkeits- und Korrektheitsbeweise
3. Prädikatenlogik
   - Syntax und Semantik
   - Resolution, Vollständigkeits- und Korrektheitsbeweise

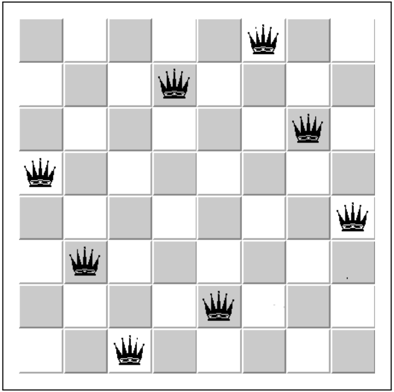
Beispiel: 8- Damen Problem

Das 8- Damen Problem

Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

Das 8- Damen Problem

Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



Das 8- Damen Problem

Aussagenlogische Beschreibung des Problems

Für jedes Feld des Schachbretts eine aussagenlogische Variable

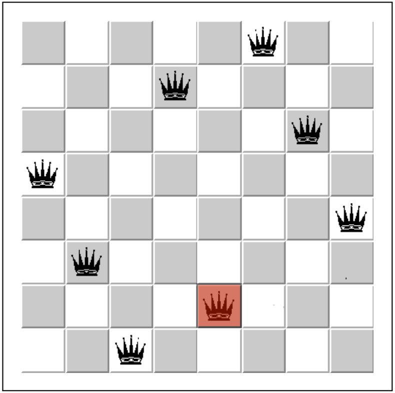
$$D_{i,j}$$

… mit der Interpretation, dass $D_{i,j}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) eine Dame steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

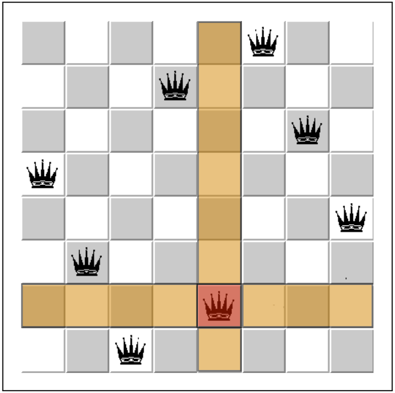
Das 8- Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld $(5,7)$ steht eine Dame



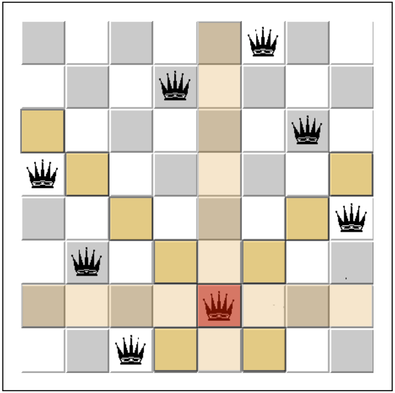
Das 8- Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld $(5, 7)$ steht eine Dame



Das 8- Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld $(5, 7)$ steht eine Dame



Das 8- Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld $(5,7)$ steht eine Dame

Einschränkungen für D_{57}

$FE_{5,7} \equiv$

$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{5,8} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$

$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{1,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{8,7}$

$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{6,8} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3}$

$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,8} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}$

Das 8- Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld $(5,7)$ steht eine Dame

Einschränkungen für D_{57}

$$
\begin{aligned}
&FE_{5,7} \equiv \\
&D_{5,7} \rightarrow \neg D_{5,8} \land \neg D_{5,6} \land \neg D_{5,5} \land \neg D_{5,4} \land \neg D_{5,3} \land \neg D_{5,2} \land \neg D_{5,1} \\
&D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,7} \land \neg D_{3,7} \land \neg D_{2,7} \land \neg D_{1,7} \land \neg D_{6,7} \land \neg D_{7,7} \land \neg D_{8,7} \\
&D_{5,7} \rightarrow \neg D_{6,8} \land \neg D_{4,6} \land \neg D_{3,5} \land \neg D_{2,4} \land \neg D_{1,3} \\
&D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,8} \land \neg D_{6,6} \land \neg D_{7,5} \land \neg D_{8,4}
\end{aligned}
$$

Entsprechende Einschränkungen für jedes Feld!

Das 8- Damen Problem

Globale Einschränkungen

Eigentlich: Es müssen genau 8 Felder belegt sein

Das 8- Damen Problem

Globale Einschränkungen

Wir mogeln

Für jedes k mit $1 \leq k \leq 8$:

$$R_k \equiv D_{1,k} \vee D_{2,k} \vee D_{3,k} \vee D_{4,k} \vee D_{5,k} \vee D_{6,k} \vee D_{7,k} \vee D_{8,k}$$

Das 8- Damen Problem

Globale Einschränkungen

Wir mogeln

Für jedes k mit $1 \leq k \leq 8$:

$$R_k \equiv D_{1,k} \vee D_{2,k} \vee D_{3,k} \vee D_{4,k} \vee D_{5,k} \vee D_{6,k} \vee D_{7,k} \vee D_{8,k}$$

Jede Zeile hat mindestens eine Dame

Das 8- Damen Problem

Eine aussagenlogische Struktur beschreibt eine Lösung des Acht- Damen Problems genau dann, wenn sie ein Modell der Formeln

$F_{i,j}$ **für alle** $1 \leq i, j \leq 8$

R_k **für alle** $1 \leq k \leq 8$

ist

Beispiel: Sudoku

Sudoku: Lösung

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Sudoku

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D_{i,j}^{k}$$

ein, mit der Vorstellung, daß $D_{i,j}^{k}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

Beispiel: $D_{9,1}^{9}$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

Sudoku

Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile

$$D^1_{1,9} \vee D^1_{2,9} \vee D^1_{3,9} \vee D^1_{4,9} \vee D^1_{5,9} \vee D^1_{6,9} \vee D^1_{7,9} \vee D^1_{8,9} \vee D^1_{9,9}$$

Sudoku

Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile

$$D^1_{1,9} \vee D^1_{2,9} \vee D^1_{3,9} \vee D^1_{4,9} \vee D^1_{5,9} \vee D^1_{6,9} \vee D^1_{7,9} \vee D^1_{8,9} \vee D^1_{9,9}$$

Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{1,4} \vee D^1_{1,5} \vee D^1_{1,6} \vee D^1_{1,7} \vee D^1_{1,8} \vee D^1_{1,9}$$

Sudoku

Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile

$$D^1_{1,9} \vee D^1_{2,9} \vee D^1_{3,9} \vee D^1_{4,9} \vee D^1_{5,9} \vee D^1_{6,9} \vee D^1_{7,9} \vee D^1_{8,9} \vee D^1_{9,9}$$

Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{1,4} \vee D^1_{1,5} \vee D^1_{1,6} \vee D^1_{1,7} \vee D^1_{1,8} \vee D^1_{1,9}$$

Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{2,1} \vee D^1_{2,2} \vee D^1_{2,3} \vee D^1_{3,1} \vee D^1_{3,2} \vee D^1_{3,3}$$

Sudoku

In jeder Zelle höchstens eine Zahl

$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^2_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^3_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^4_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^5_{1,1}),$
$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^6_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^7_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^8_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^9_{1,1}),$
$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^3_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^4_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^5_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^6_{1,1}),$
$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^7_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^8_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^9_{1,1}),\ \neg(D^3_{1,1} \wedge D^4_{1,1}),$
usw. . .

Sudoku

Allgemein

$$\neg(D_{i,j}^{s} \wedge D_{i,j}^{t})$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

Ergibt $81 * 36 = 2916$ Formeln.

Zusammenfassung

Einführung: Zusammenfassung

- Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik

Einführung: Zusammenfassung

- Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik
- Modellierung, Adäquatheit der Modellierung

Einführung: Zusammenfassung

- Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik
- Modellierung, Adäquatheit der Modellierung
- Wesentliche Komponenten für jede Logik:
  Syntax, Semantik, Deduktionsmeachanismus (Kalkül)
- Beispiel Aussagenlogik: Syntax, Sematik, Syllogismen

Einführung: Zusammenfassung

- Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik
- Modellierung, Adäquatheit der Modellierung
- Wesentliche Komponenten für jede Logik:
  Syntax, Semantik, Deduktionsmeachanismus (Kalkül)
- Beispiel Aussagenlogik: Syntax, Sematik, Syllogismen
  The Whole Picture:
  - Formel in der “wahren Welt” / (semantisch) gültige Formel, gültige Formel / ableitbare Formel
  - Vollständigkeit und Korrektheit von Kalkülen

Einführung: Zusammenfassung

- Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik
- Modellierung, Adäquatheit der Modellierung
- Wesentliche Komponenten für jede Logik:
  Syntax, Semantik, Deduktionsmeachanismus (Kalkül)
- Beispiel Aussagenlogik: Syntax, Sematik, Syllogismen
  The Whole Picture:
  - Formel in der "wahren Welt" / (semantisch) gültige Formel, gültige Formel / ableitbare Formel
  - Vollständigkeit und Korrektheit von Kalkülen
- Beispiel für (nicht- triviale) aussagelogische Modellierungen:
  Acht- Damen- Problem, Sudoku

Aufgaben

Modellieren Sie das 3- Stockwerk- Aufzugsproblem. Geben Sie jeweils eine umgangssprachliche und eine Aussagenlogische Formulierung an.

- Welche wichtigen Elemente gibt es?
- Welche atomaren Eigenschaften sollten modelliert werden?
- Welche statischen Einschränkungen können beschrieben werden?

Geben Sie eine Reihe von legalen und illegalen Strukturen für diese Spezifikation an.