Theoretische Grundlagen des Software Engineering

3: Nichtdeterminismus

Stephan Schulz
schulz@eprover.org

Software Systems Engineering

Stiftung Universität Hildesheim 2003

Beispiel

Sei $\Sigma=\{0,1\}$. Betrachte zwei Familien von Sprachen:

- $L_k=\{u1v \mid |u|=k-1, k\in\mathbf{N}, u,v\in\Sigma^*\}$ (das k-te Zeichen ist 1)
- $M_k=\{u1v \mid |v|=k-1, k\in\mathbf{N}, u,v\in\Sigma^*\}$ (das k-letzte Zeichen ist 1)

Beispiel: L_k

$L_1{:}\delta$	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
$*q_2$	q_2	q_2

$L_2{:}\delta$	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_1
q_1	q_2	q_3
q_2	q_2	q_2
$*q_3$	q_3	q_3

$L_3{:}\delta$	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_3	q_4
q_3	q_3	q_3
$*q_4$	q_4	q_4

$L_4{:}\delta$	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_3	q_3
q_3	q_4	q_5
q_4	q_4	q_4
$*q_5$	q_5	q_5

Beispiel: M_k

$M_1{:}\delta$	0	1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
$*q_1$	q_0	q_1

$M_2{:}\delta$	0	1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
q_1	q_3	q_2
$*q_2$	q_3	q_1
$*q_3$	q_0	q_1

$M_3{:}\delta$	0	1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
q_1	q_3	q_2
q_2	q_5	q_4
q_3	q_7	q_6
q_4	q_5	q_4
q_5	q_7	q_6
q_6	q_3	q_2
q_7	q_0	q_1

Zustände für EA:	
M_1	2
M_2	4
M_3	8
M_4	16
M_5	32
M_6	64
M_7	128
...	...
M_{20}	1048576

Warum?

Maschinen für L_i müssen nur Zeichen zählen

- Pro Zeichen ein Zustand
- Nach i Zeichen steht der Endzustand fest

Maschinen für M_i müssen die letzten i Zeichen speichern

- Pro Zeichen verdoppelt sich die Anzahl der Kombinationen

Was tun?

Nicht-Determinismus

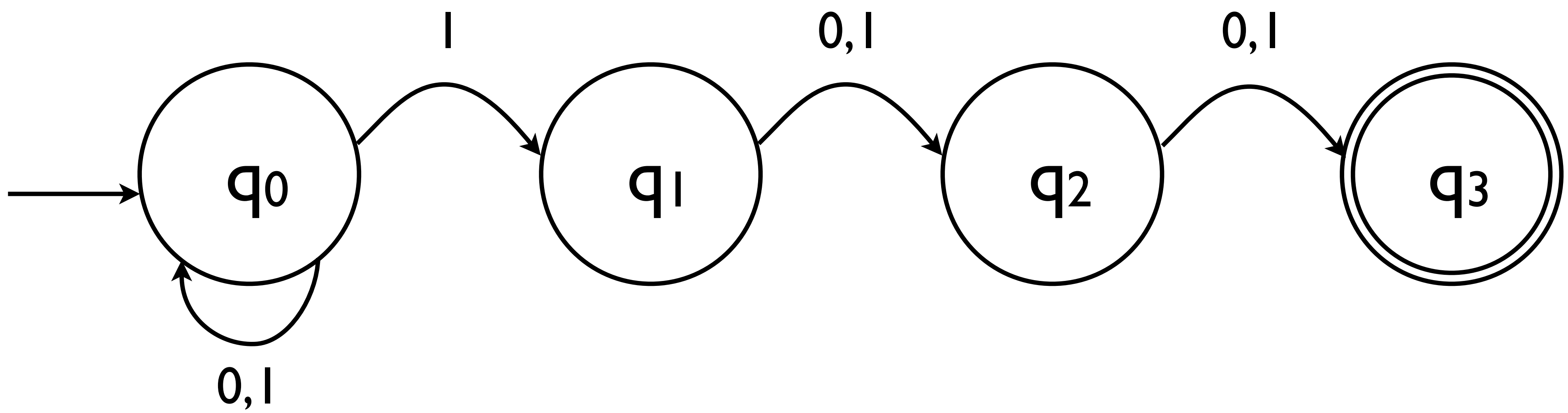
Stelle Vermutungen über die Struktur des Wortes an

- Verfolge alle nicht widerlegten Vermutungen gleichzeitig
- Brich ab, wenn Vermutung widerlegt
- Akzeptiere, wenn eine dieser Vermutungen zu einem akzeptierenden Zustand führt

Realisierung:

- Nichtdeterministischer endlicher Automat
- Kann mit jedem Schritt potentiell in mehrere (oder keinen) Nachfolgezustände übergehen

Beispiel für M_3



M_3:δ	0	1
→q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
*q_3	{}	{}

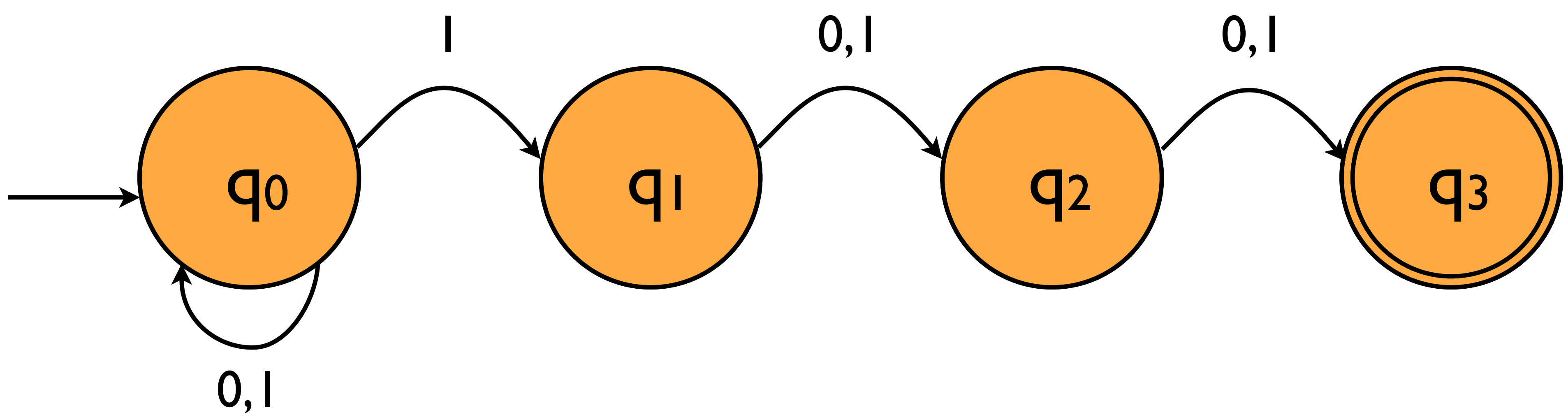
Betrachte Rechnung für:

0101

1000

10111

Beispiel fortgesetzt



- _10111: $\{q_0\}$
- 1_0111: $\{q_0, q_1\}$
- 10_111: $\{q_0,q_2\}$
- 101_11: $\{q_0, q_1,q_3\}$
- 1011_1: $\{q_0, q_1,q_2\}$
- 10111_: $\{q_0, q_1,q_2,q_3\}$

Also: Der Automat akzeptiert 10111, da er sich auch in einem akzeptierenden Zustand befinde!

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition: Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) ist ein 5-Tupel $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei

- Q ist eine endliche Menge (die Zustände)
- Σ ist ein Alphabet
- $\delta: Q\times\Sigma\rightarrow 2^Q$ ist die Übergangsfunktion
- $q_0 \in Q$ ist der Startzustand
- $F \subseteq Q$ ist die Menge der akzeptierenden Zustände

Diskussion

Definitionen von DEA und NEA unterscheiden sich nur in der Definition der Übergangsfunktion δ

- DEA bildet Zustände in Zustände ab
- NEA bildet Zustände auf Menge von Zuständen ab
  - Beachte: Menge kann leer sein!
- Erfordert entsprechende Änderungen bei erweiterter Übergangsfunktion und Sprache des Automaten

Erweiterte Übergangsfunktion (NEA)

Definition: Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein endlicher Automat mit Übergangsfunktion δ. Die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta}$ ist rekursiv definiert wie folgt:

- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}$ falls x=ϵ (Basisfall)
- Ansonsten kann x als *wa* mit $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ geschrieben werden. Dann gilt: $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(r, a)$

Beispiel

M_3:δ	0	1
→q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
*q_3	{}	{}

Berechne $\hat{\delta}$ (q_0, 10111)

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(q_0, \epsilon) &= \{q_0\} \\
\hat{\delta}(q_0, 1) &= \cup_{r\in\hat{\delta}(q_0,\epsilon)}\delta(r,1) = \delta(q_0,1) = \{q_0,q_1\} \\
\hat{\delta}(q_0, 10) &= \cup_{r\in\hat{\delta}(q_0,1)}\delta(r,0) = \delta(q_0,0) \cup \delta(q_1,0) \\
&= \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0,q_2\} \\
\hat{\delta}(q_0, 101) &= \cup_{r\in\hat{\delta}(q_0,10)}\delta(r,1) = \delta(q_0,1) \cup \delta(q_2,1) \\
&= \{q_0,q_1\} \cup \{q_3\} = \{q_0,q_1,q_3\} \\
\hat{\delta}(q_0, 1011) &= \cup_{r\in\hat{\delta}(q_0,101)}\delta(r,1) = \delta(q_0,1) \cup \delta(q_1,1) \cup \delta(q_3,1) \\
&= \{q_0,q_1\} \cup \{q_2\} \cup \{\} = \{q_0,q_1,q_2\} \\
\hat{\delta}(q_0, 10111) &= \cup_{r\in\hat{\delta}(q_0,1011)}\delta(r,1) = \delta(q_0,1) \cup \delta(q_1,1) \cup \delta(q_2,1) \\
&= \{q_0,q_1\} \cup \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_0,q_1,q_2,q_3\}
\end{aligned}$$

Sprache eines NEA

Definition: Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein nichtdeterministischer endlicher Automat und $\hat{\delta}$ die erweiterte Übergangsfunktion zu δ.

- A akzeptiert ein Wort $w \in \Sigma^*$, wenn $\hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$.
- $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$ ist die Sprache von A.

Frage: Wie hängen deterministische und nichtdeterministische endliche Automaten zusammen?

Äquivalenz von DEAs und NEAs

Theorem 3:

(a) Für jeden deterministischen endlichen Automaten A gibt es einen nichtdeterministischen endlichen Automaten B mit $L(A)=L(B)$.

(b) Für jeden nichtdeterministischen endlichen Automaten B gibt es einen deterministischen endlichen Automaten A mit $L(B)=L(A)$.

Korollar: Eine Sprache ist genau dann regulär, wenn es einen nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt, der sie erkennt.

Beweis (Theorem 3a)

Behauptung: Sei $D=(Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat. Dann existiert ein nichtdeterministischer endlicher Automat N mit der Eigenschaft $L(D)=L(N)$.

Beweis: Betrachte $N=(Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ mit $\delta_N(q, a)= \{\delta_D(q, a)\}$ für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$. Dann gilt für alle $w \in \Sigma^*$ (Übung):

$$\hat{\delta}_N(q_0, w) = \{\hat{\delta}_D(q_0, w)\}$$

Also: N akzeptiert w genau dann, wenn D w akzeptiert, ergo $L(N)=L(D)$.

Anmerkung: Die Konstruktion von N ist so trivial, dass oft DEA's als eine Unterklasse von NEAs betrachtet werden

DEA Konstruktion

Ziel: Konstruiere zu einem gegebenen NEA einen äquivalenten DEA

Idee:

- Assoziiere mit jeder Teilmenge von Zuständen des NEA einen Zustand des DEA.
- Wähle eine Übergangsfunktion, die das Verhalten des NEAs nachbildet

Beispiel: DEA-Konstruktion

Betrachte folgenen NEA N:

- $Q=\{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma=\{0,1\}$
- $F=\{q_2\}$
- Startzustand q_0
- δ_N nach Tabelle

$N{:}\delta_N$	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{\}$	$\{\}$

Frage: $L(A)$?

- $L(A)=\{u01 \mid u\in\Sigma^*\}$ (alle Worte, die auf 01 enden)

Beispiel: DEA-Konstruktion

$N{:}\delta_N$	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{\}$	$\{\}$

Ziel: Konstruktion von DEA D

$D=(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$

Idee: NEAs sind "in mehreren Zuständen gleichzeitig"

- Zustände von D: 2^Q
- Alphabet bleibt gleich
- δ_D "geeignet"
- Startzustand: $\{q_0\}$
- $F_D=\{S\in 2^Q \mid S\cap F\neq\emptyset\}$

Beispiel: DEA-Konstruktion

$N{:}\delta_N$	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{\}$	$\{\}$

$D{:}\delta_D$	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

$$\delta_D(q, a) = \bigcup_{r \in q} \delta_N(r, a)$$

Beispiel: DEA-Konstruktion - Umbenennen

$D{:}\delta_D$	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

$\Leftrightarrow$

$D{:}\delta_D$	0	1
A	A	A
$\rightarrow B$	E	B
C	A	D
D	A	A
E	E	F
$*F$	E	B
$*G$	A	D
$*H$	E	F

Beispiel: DEA-Konstruktion - Vereinfachen

D:δ_D	0	1
A	A	A
$\rightarrow B$	E	B
C	A	D
D	A	A
E	E	F
$*F$	E	B
$*G$	A	D
$*H$	E	F

Vereinfachen von *D*:

- Streiche alle unerreichbaren Zustände

D:δ_D	0	1
$\rightarrow B$	E	B
E	E	F
$*F$	E	B

- Umbenennen und Vereinfachen sind strikt optional!

DEA-Konstruktion - Formal

Definition: Sei $N=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$

Die Teilmengen-DEA-Konstruktion erzeugt einen DEA $D=(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ wie folgt:

- $Q_D=2^{Q_N}$
- $q_D=\{q_N\}$
- $\delta_D(q,a) = \bigcup_{r \in q} \delta_N(r,a)$ für alle $q \in Q_D$, $a \in \Sigma$
- $F_D=\{S \in 2^{Q_N} \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$

Korrektheit der DEA-Konstruktion

Lemma 2: Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ ein nichtdeterministischer EA, $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ der durch die Teilmengenkonstruktion aus N erzeugte DEA. Dann gilt: $L(N) = L(D)$

Beweis: Wir zeigen die Äquivalenz via Induktion, d.h. wir zeigen:

$$\hat{\delta}_N(q_N, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$$

Korrektheit der DEA-Konstruktion (2)

IA: |*w*|=*0*, d.h. *w*=ϵ: $\hat{\delta}_N(q_N, \epsilon) = \{q_N\} = q_D = \hat{\delta}_D(q_D, \epsilon)$

IV: Behauptung gelte für x mit |*x*|=*k*, also

$$\hat{\delta}_N(q_N, x) = \hat{\delta}_D(q_D, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$$

IS: |*w*|=*k*+*1*, sei also *w*=*xa*

Nach Def. $\hat{\delta}_N$: $$\hat{\delta}_N(q_0, xa) = \bigcup_{r \in \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}} \delta_N(r, a)$$

Konstr: $$\delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, a) = \bigcup_{r \in \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}} \delta_N(r, a)$$

Korrektheit der DEA-Konstruktion (3)

IS fortgesetzt:
$$\begin{aligned}\hat{\delta}_D(q_D, xa) &= \delta_D(\hat{\delta}_D(q_D, x), a) \\ &= \delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, a) \\ &= \bigcup_{r \in \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}} \delta_N(r, a) \\ &= \hat{\delta}_N(q_0, xa)\end{aligned}$$

Also: *D* akzeptiert *w*, genau dann, wenn *N w* akzeptiert.

Also: *L(D)* = *L(N)*

q.e.d.

Ende

Übung

Behauptung: Sei $D=(Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat. Dann existiert ein nichtdeterministischer endlicher Automat N mit der Eigenschaft $L(D)=L(N)$.

Beweis: Betrachte $N=(Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ mit $\delta_N(q, a)= \{\delta_D(q, a)\}$ für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$. Dann gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\hat{\delta}_N(q_0, w) = \{\hat{\delta}_D(q_0, w)\}$$

Aufgaben

Wandeln Sie den folgenden NEA in einen äquivalenten DEA um:

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
$*q_3$	$\{\}$	$\{\}$

Minimieren sie das Ergebnis.